

リーマンゼータ関数の奇数値と多重ゼータ値の関係性

大阪教育大学附属高等学校池田校舎 2年3組 陳 翊萱

概要

本研究では、3～13の奇数重さのリーマンゼータ値と2～4の深さの多重ゼータ値の既知の等式をPSLQアルゴリズムで探索し、3, 5, 7の重さでは一部の既知の等式を確認したが、9, 11, 13の重さではリーマンゼータ値と多重ゼータ値の精度不足によりPSLQアルゴリズムの限界が示された。リッジ回帰を用いてリーマンゼータ関数の正の奇数値と3, 4, 5の深さ、重さ9における多重ゼータ値との等式を探索した結果、一つの未知の線形関係式が得られ、数学的厳密性を確認するために更に理論的な証明が必要である。

研究背景

本研究に利用したツール・専門用語を整理する。

- PSLQアルゴリズム: 整数関係を見つけるためのアルゴリズムである[1]。
- リッジ回帰: 最小二乗法に正則化項を加えることで、過学習を抑えながら回帰係数を推定する線形回帰手法である[2]。過学習を防ぐと同時に、変数が互いに強く相関している多重共線性の問題を解決できる。
- 過学習: 数値モデルが個別のデータが持つ偶然の誤差にまで過剰に適合してしまう現象である。
- 正則化: 機械学習モデルにおける過学習を減らす手法である。

以下、リーマンゼータ関数に関わる定義と関係式を整理する。

- リーマンゼータ関数:** 複素数 s , 実部 $\text{Re } s>1$ のとき、下記左の $\zeta(s)$ をリーマンゼータ関数という。
- 多重ゼータ値:** 深さである成分の個数 r , 重さである成分の総和 $k_1+\cdots+k_r$ に対し、下記の $\zeta(k_1, \dots, k_r)$ を多重ゼータ値という。正整数 r 個の組 $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_r)$ をインデックスと呼び、最後の成分 k_r が 2 以上である時に**収束インデックス**と呼ぶ。

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots, \quad \zeta(k_1, \dots, k_r) = \sum_{0 < n_1 < \cdots < n_r} \frac{1}{n_1^{k_1} \cdots n_r^{k_r}}$$

- 双対性:** 互いに重さが等しい関係にある二つの収束インデックス $\mathbf{k}, \mathbf{k}'$ に対し、 $\zeta(\mathbf{k}) = \zeta(\mathbf{k}')$ が成り立つ。
例: $\zeta(3) = \zeta(2, 1)$
- 和公式:** 重さ k , 深さ $n(1 \leq n < k)$ を固定して、その重さ、深さを持つ多重ゼータ値すべての和をとるとリーマンゼータ値となる。

$$\sum_{k_1+k_2+\cdots+k_n=k} \zeta(k_1, k_2, \dots, k_n) = \zeta(k)$$

例: $\zeta(5) = \zeta(2, 3) + \zeta(3, 2) + \zeta(4, 1)$

- Hoffmanの関係式:** 収束インデックス $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_n)$ に対し、次が成り立つ。

$$\sum_{i=1}^n \zeta(k_1, \dots, k_{i-1}, k_i + 1, k_{i+1}, \dots, k_n) = \sum_{\substack{1 \leq l \leq n \\ k_l \geq 2}} \sum_{j=0}^{k_l-2} \zeta(k_1, \dots, k_{l-1}, k_l - j, j + 1, k_{l+1}, \dots, k_n)$$

例: $\mathbf{k} = (2, 3)$ に対して、 $\zeta(3, 3) + \zeta(2, 4) = \zeta(2, 3) + \zeta(2, 1, 2) + \zeta(3, 1, 1)$

先行研究と研究目的

先行研究: Zagierは多重ゼータ値がつくる空間の次元を予想し、その正しさを理論と計算機の両面から確かめた[4][5]。その一方で、 **$\zeta(3)$ や **$\zeta(5)$ といった奇数値どうしの独立性や、多重ゼータ値の関係式の全容は、いまだに解明されていない**[4][5][6]。本研究はこの未解決部分に焦点をあて、**奇数重さの多重ゼータ値がもつ線形的な構造を、PSLQアルゴリズムやリッジ回帰によって具体的に調べた**ものである。**

目的: リーマンゼータ関数の正の奇数値と奇数重さに特有の多重ゼータ値との関係性を明らかにする。

研究方法

以下のすべての数値実験または分析はVisual Studio Codeで行った。

- リーマンゼータ関数の正の奇数値($\zeta(3) \sim \zeta(13)$)と2, 3, 4の深さにおける多重ゼータ値との等式をPSLQアルゴリズムで探索した[表1]。
- リーマンゼータ関数の正の奇数値と3, 4, 5の深さ、重さ9における多重ゼータ値との等式をリッジ回帰で探索し[図1], 得られた等式の信頼性を評価するため、多重ゼータ値の級数の打ち切り項数 N を500, 1000, 2000, 4000, 8000と変化させながら、各 N における左辺と右辺の残差の絶対値を計算した[表2]。

重さ w	mp.dps	誤 差	N（深さ3）	1500
3	200	10^{-170}	N（深さ4）	1200
5	200	10^{-170}	N（深さ5）	1000
7	250	10^{-220}	mp.dps	200
9	300	10^{-270}	正則化パラメータ λ	10^{-12}
11	350	10^{-320}	連分数展開項数	12
13	400	10^{-370}		

[表1] PSLQアルゴリズムの精度設定

ここでmp.dpsとは、mpmathライブラリにおける小数点以下の有効桁数を指定するパラメータであり、この値を大きくするほど計算精度は向上するが、その分計算時間も増加する。

```
def ridge_regression(  
    values: list[mp.mpf], zeta9: mp.mpf, lam: mp.mpf  
) -> tuple[list[mp.mpf], mp.mpf]:  
    """  
    目的変数 zeta9 を MZV 値 values で線形近似する。  
    正規方程式: (V^T V + λ I) c = V^T zeta9  
    戻り値: (係数ベクトル c, 残差)  
    """  
  
    M = len(values)  # ←  
    # V は 1×M 行ベクトル (mp.matrix)  
    V = mp.matrix([[list(values)]] ) # 1×M  # ←  
    z = mp.matrix([[zeta9]]) # 1×1
```

[図1]リッジ回帰によるリーマンゼータ関数の正の奇数値と3, 4, 5の深さ、重さ9における多重ゼータ値との等式探索のコードの一部

- values: 3, 4, 5の深さ、重さ9における多重ゼータ値のリスト
- M: 3, 4, 5の深さ、重さ9における多重ゼータ値の個数(合計91個)

- valuesをPythonのリストに変換
- $\zeta(9)$ の1×1 の行列を作成

研究方法

```
# V^T は M×1, V^T V は M×M (ランク1)  
VT = V.T # M×1  # ←  
VTV = VT * V # M×M (外積)  
  
# V^T z は M×1  
VTz = VT * z # M×1  
  
# (V^T V + λ I) を作成  
I_M = mp.eye(M)  # ←  
A = VTV + lam * I_M
```

- $(M \times 1) \times (1 \times M) = M \times M$ の外積行列
- $(M \times 1) \times (1 \times 1) = M \times 1$ の右辺ベクトル

$M \times M$ の単位行列

研究結果① [既知の等式の検証]

以下はPSLQアルゴリズムを用いたゼータ関数の奇数値と多重ゼータ値との等式の数値実験としての探索である。以下の等式を検出できた。

- $\zeta(3) = \zeta(2,1)$ (和公式, 双対性, Hoffmanの関係式より導出)
- $\zeta(5) = \zeta(2,3) + \zeta(3,2) + \zeta(4,1)$ (和公式より導出)
- $\zeta(7) = \zeta(2,5) + \zeta(3,4) + \zeta(4,3) + \zeta(5,2) + \zeta(6,1)$ (和公式より導出)
- $\zeta(1,1,3) - \zeta(1,2,2) = 0$ (双対性より導出)
- $\zeta(1,1,5) - \zeta(1,3,3) = 0$ (双対性より導出)

※括弧内は何の公式から導くのができるかを示している。

研究結果② [多重ゼータ値の関係式の探索]

リーマンゼータ関数の正の奇数値と3, 4, 5の深さ、重さ9における多重ゼータ値との等式をリッジ回帰で探索した結果として、次の式を検出できた。

$$\begin{aligned} \zeta(9) = & \frac{7}{8} \zeta(2, 1, 6) + \frac{143}{180} \zeta(2, 1, 1, 5) + \frac{38}{143} \zeta(2, 2, 5) + \frac{35}{144} \zeta(2, 1, 2, 4) \\ & + \frac{19}{173} \zeta(3, 1, 5) + \frac{8}{75} \zeta(2, 3, 4) + \frac{1}{10} \zeta(2, 2, 1, 4) + \frac{17}{174} \zeta(2, 1, 3, 3) \end{aligned}$$

等式の左辺と右辺との残差を打ち切り項数 N ごとに (500, 1000, 2000, 4000, 8000) 求めた[表3][表4]。残差は $N=8000$ で最小 (0.0023) となり、 $N \geq 2000$ で 0.0023 ~ 0.0180 に収束すると見られる。

MZV	$N = 500$	$N = 1000$	$N = 2000$	$N = 4000$	$N = 8000$
$\zeta(2, 1, 6)$	0.549386	0.555572	0.559019	0.560920	0.561958
$\zeta(2, 1, 1, 5)$	0.489439	0.508266	0.519993	0.527137	0.531411
$\zeta(2, 2, 5)$	0.167801	0.168458	0.168786	0.168951	0.169033
$\zeta(2, 1, 2, 4)$	0.151494	0.154796	0.156681	0.157741	0.158330
$\zeta(3, 1, 5)$	0.069531	0.069540	0.069543	0.069543	0.069543
$\zeta(2, 3, 4)$	0.067397	0.067604	0.067708	0.067760	0.067786
$\zeta(2, 2, 1, 4)$	0.062851	0.063423	0.063712	0.063857	0.063930
$\zeta(2, 1, 3, 3)$	0.061001	0.062138	0.062781	0.063140	0.063280

[表3]各打ち切り項数における多重ゼータ値

	N	左辺	右辺	残差（指数）	残差（小数）
	500	1.002008	0.977842	2.42×10^{-2}	0.02416557
	1000	1.002008	0.999378	2.63×10^{-3}	0.00263049
	2000	1.002008	0.991658	1.04×10^{-2}	0.01035006
	4000	1.002008	0.983963	1.80×10^{-2}	0.01804460
	8000	1.002008	0.999753	2.25×10^{-3}	0.00225431

[表4]各打ち切り項数における残差

考察

リッジ回帰により、 **$\zeta(9)$ と3, 4, 5 深さの多重ゼータ値を結ぶ未知の線形関係式が数値的に示唆**された。係数は複雑な有理数でよく近似され、残差も偶然とは考えにくいほど小さい。しかし、**打ち切り項数 N を増やしても残差の減少は不安定で、明確な収束は確認できなかった**。このことから、この式は打ち切り誤差の影響を強く受けており、**数学的に厳密な等式であるかを示すことはできていない**。

今後の展望

- PSLQアルゴリズムを用いた既知の等式の検証における**精度不足の具体的な要因を解明**することが今後の課題である。
- リッジ回帰を用いたリーマンゼータ関数の奇数値と多重ゼータ値との等式探索で得られた**未知の線形関係式を多重ゼータ値の定義・性質から理論的に証明する必要がある**。
- 得られた近似式をPSLQアルゴリズムで整数関係を探索し、**係数を再確認することで厳密性を改めて評価**する見込みがある。
- 本研究のリッジ回帰を用いた等式探索の**多重ゼータ値の重さの範囲を更に拡大**し、新しい等式の発見を目指す。

参考文献

- PSLQアルゴリズム**－Wolfram MathWorld 閲覧日:2026/1/22
https://mathworld.wolfram.com/PSLQAlgorithm.html
- リッジ回帰** 閲覧日:2026/7/1
https://jp.mathworks.com/help/stats/ridge.html
- 多重ゼータ値入門** 荒川恒男 金子昌信 閲覧日:2026/1/21
https://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~mkaneko/papers/MZV_LectureNotes.pdf
- ゼータ関数の値とその応用** Don Zagier 第1回ヨーロッパ数学会議 1992年
https://people.mpim-bonn.mpg.de/zagier/files/scanned/ValuesZetaFunsAndApplications/fulltext.pdf
- 多重ゼータ値の予想次元について** 鶴巻 健一 閲覧日:2026/5/1
https://www.math.kobe-u.ac.jp/RisaCon/slide-2007/turumaki.pdf
- 正規化複シャフル関係式と川島関係式** 山本修司 閲覧日:2026/5/4
https://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/pdf/2015-01.pdf
- 有限多重ゼータ値** 金子昌信 閲覧日:2026/5/4
https://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~mkaneko/papers/B68-12.pdf